Processamento Tensorial de Sinais Aplicado às Comunicações

Lucas Nogueira Ribeiro, João César Moura Mota, André Lima Férrer de Almeida
Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio (GTEL)
Universidade Federal do Ceará
Email: {nogueira, mota, andre}@gtel.ufc.br

***Resumo*—A álgebra multilinear surgiu no contexto de processamento de sinais como a ferramenta adequada para o processamento de sinais multidimensionais, bastante comum em Telecomunicações. Ferramentas multilineares como tensores e suas decomposições permitem o desenvolvimento de receptores capazes de explorar as múltiplas diversidades presentes em sistemas de comunicação. Neste trabalho apresentamos a aplicação do processamento tensorial de sinais em problemas de comunicação relevantes para o desenvolvimento das novas gerações de sistemas de telefonia móvel.**

***Index Terms*—PARAFAC, álgebra multilinear, MIMO**

I. Introdução

PROCESSAMENTO de sinais constitui o campo da Ciência que estuda métodos de análise e síntese de sinais, medições ou sequências que podem representar grandezas físicas. Esses métodos baseiam-se em ferramentas matemáticas como estatística, álgebra linear, análise real e complexa para descrever sinais e suas transformações. Com o advento dos computadores digitais, os métodos de processamento de sinais passaram a ser implementados de forma eficiente, popularizando o seu uso prático em diversos campos da Ciência e Engenharia. Em Telecomunicações, o processamento de sinais é ubíquo. Ele é utilizado, por exemplo, no projeto de componentes de sistemas de comunicações: (des)moduladores, formatadores de feixe, equalizadores, dentre outros. Diversos fenômenos físicos, como o desvanecimento, são modelados por filtros.

Grande parte das estratégias de processamento de sinais em comunicação utiliza ferramentas provenientes da álgebra linear para modelar as transformações exercidas sobre os sinais pelo transmissor, canal, e receptor. Nesse contexto, métodos matriciais permitem a exploração de apenas dois domínios ou diversidades do sinal. Domínios bastante comuns são o espaço e o tempo. O primeiro está associado ao número de sensores disponíveis no sistema, enquanto o segundo representa o processamento realizado em amostras ou blocos temporais. Entretanto, em vários problemas de Engenharia, os sinais são inerentemente multidimensionais, ou seja, apresentam múltiplas diversidades. Nesse caso, ferramentas matriciais não são adequadas, pois não são capazes de processar conjuntamente as múltiplas diversidades utilizando matrizes. A álgebra multilinear, aquela que estuda os tensores de ordem superior, foi introduzida em processamento de sinais como a ferramenta adequada para a modelagem de sinais multidimensionais [1], [2]. A seguir, tensores e suas decomposições serão introduzidos.

A. Tensores e suas decomposições

Tensores constituem uma ferramenta matemática introduzida no século XIX no contexto do cálculo diferencial, sendo bastante utilizada na Física para representar leis independentemente do sistema de coordenadas [3]. Um tensor é definido como um operador multilinear que transforma um espaço linear em outro. Da mesma forma, ele também pode ser interpretado como um arranjo multidimensional de dados. Um tensor real de N-ésima ordem é representado por $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N}$ e suas entradas por $[\mathcal{X}]_{i_1,i_2,\ldots,i_N} = x_{i_1,i_2,\ldots,i_N}$ em que $i_\mu \in \{1, 2, \ldots, I_\mu\}$ para $\mu = 1, 2, \ldots, N$. Portanto um vetor é um tensor de primeira ordem, e uma matriz é um tensor de segunda ordem. Um tensor de N-ésima ordem $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_N}$ possui rank-1 se ele puder ser escrito como o produto externo de N vetores:

$$\mathcal{X} = \mathbf{a}^{(1)} \circ \mathbf{a}^{(2)} \circ \ldots \circ \mathbf{a}^{(N)}, \tag{1}$$

em que $\circ$ representa o produto externo e $\mathbf{a}^{(\mu)} \in \mathbb{R}^{I_\mu}$ para $\mu = 1, \ldots, N$. Dessa forma, os elementos de $\mathcal{X}$ podem ser escritos como

$$x_{i_1,i_2,\ldots,i_N} = a_{i_1}^{(1)} a_{i_2}^{(2)} \ldots a_{i_N}^{(N)} \tag{2}$$

em que $a_{i_\mu}^{(\mu)} = [\mathbf{a}^{(\mu)}]_{i_\mu}$ para $\mu = 1, 2, \ldots, N$.

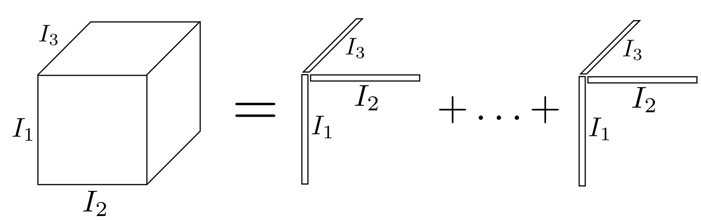

Figura 1. Decomposição PARAFAC de um tensor de terceira ordem.

A decomposição *PARAllel FACtors* (PARAFAC) de $\mathcal{X}$ é definida como a combinação linear de R tensores de rank-1 [2], [4]:

$$\mathcal{X} = \sum_{r=1}^{R} \lambda_r \mathbf{a}_r^{(1)} \circ \mathbf{a}_r^{(2)} \circ \ldots \circ \mathbf{a}_r^{(N)}, \tag{3}$$

em que $\mathbf{a}_r^{(\mu)} \in \mathbb{R}^{I_\mu}$ para $\mu = 1, 2, \ldots, N$, $\lambda_r \in \mathbb{R}$. A decomposição PARAFAC de um tensor de 3ª ordem é ilustrada na Figura 1. O rank de $\mathcal{X}$ é definido como o menor valor de R que satisfaça exatamente a equação (3). Sabe-se que não existe algoritmo finito para o cálculo do rank de um tensor [4]. Na prática, R é escolhido de forma que o erro de aproximação $\|\mathcal{X} - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r \mathbf{a}_r^{(1)} \circ \mathbf{a}_r^{(2)} \circ \ldots \circ \mathbf{a}_r^{(N)}\|_F^2$ seja mínimo, em que $\|\cdot\|_F$ é a norma de Frobenius.

A decomposição PARAFAC é essencialmente única se a condição for satisfeita:

$$\sum_{n=1}^{N} k_{\mathbf{A}^{(n)}} \geq 2R + N - 1, \tag{4}$$

em que $\mathbf{A}^{(n)} = \left[\mathbf{a}_1^{(n)}, \mathbf{a}_2^{(n)}, \ldots, \mathbf{a}_R^{(n)}\right] \in \mathbb{R}^{I_n \times R}$ para $n = 1, \ldots, N$ e $k_{\mathbf{A}^{(n)}}$ é o rank de Kruskal da matriz $\mathbf{A}^{(n)}$, definido como o máximo valor de k tal que qualquer k colunas de $\mathbf{A}^{(n)}$ sejam linearmente independentes [4]. Conhecimento *a priori* da estrutura algébrica do tensor pode fornecer condições de unicidade ainda mais brandas. No geral, a condição (4) é menos restritiva e mais natural do que as condições impostas pelas decomposições matriciais.

Existem diversas formas de cálculo para a obtenção do modelo PARAFAC [5]. Um dos algoritmos mais conhecidos para o cálculo dessa decomposição é o *alternating least-squares* (ALS). Esse método é conceitualmente simples e fácil de se implementar, entretantom por ser de uma natureza não-linear, ele pode demandar várias iterações para atingir a convergência, e ainda não possui garantia de convergência para pontos de mínimos globais. Recentemente novos paradigmas de cálculo da decomposição PARAFAC têm sido propostos. Em [6], os autores apresentaram um algoritmo PARAFAC adaptativo *online* no contexto de radar *multiple-input-multiple-output* (MIMO). Uma outra abordagem baseada no cálculo sequencial das matrizes fatores PARAFAC foi apresentado em [7]. Um algoritmo distribuído adaptado para tensores com alta dimensionalidade foi proposto em [8].

A decomposição PARAFAC é tida como representação canônica de tensores dada a sua simplicidade e aplicabilidade em vários problemas. Entretanto outras decomposições como Tucker, PARATUCK, *Block Term Decomposition*, dentre outras, são mais adequadas em certas aplicações. Para maior informações acerca dessas decomposições, o leitor é remetido para a referência [9].

II. Aplicações em sistemas de comunicação

Ferramentas tensoriais são adequadas para a modelagem de sistemas de comunicação pois: i) cada diversidade do sistema é mapeada em uma dimensão de um tensor, de forma que a sua dimensionalidade depende dos parâmetros físicos do sistema. Isso permite levar em consideração a interdependência e redundância entre os múltiplos domínios físicos dos sinais mapeados no tensor de dados. ii) Como visto na Seção anterior, decomposições tensoriais apresentam condições de unicidade mais brandas que as decomposições matriciais. Isso permite o desenvolvimento de métodos de processamento tensorial de sinais que necessitam de menos recursos, como número de sensores ou quantidade de amostras, para fornecer um resultado satisfatório. iii) Quando a quantidade de amostras do sinal é bastante elevada (*Big Data*), métodos matriciais tornam-se impraticáveis, pois eles passam a apresentar problemas numéricos (“maldição da dimensionalidade”). A álgebra multilinear é adaptada ao cenário *Big Data*, pois ela oferece métodos de análise de dados eficientes e robustos à quantidade de dados processados. Espera-se que a 5ª geração de telefonia móvel use um arranjo massivo de antenas tanto nos transmissores como nos receptores. Isso introduzirá o cenário *Big Data* nos sistemas de comunicações, motivando mais uma vez o uso de técnicas de processamento tensorial de sinais.

A seguir, serão detalhadas algumas aplicações de processamento tensorial de sinais em sistemas de comunicação.

A. Receptor PARAFAC para sistemas DS-CDMA

O trabalho seminal de Sidiropoulos, Giannakis e Bro [10] foi o primeiro a modelar um sistema de comunicações sem fio utilizando modelagem tensorial. Especificamente, foi considerado um sistema DS-CDMA multiusuário com K antenas na recepção processando os sinais transmitidos por M usuários. Cada usuário transmite N símbolos codificados por um código de comprimento J. O tensor espaço-tempo-código $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{K \times N \times J}$ dos sinais recebidos segue o modelo PARAFAC de rank M, em que as suas matrizes fatores são as matrizes de canal, símbolo e código, respectivamente. Essas matrizes fatores podem ser estimadas conjuntamente de forma não-supervisionada se as condições de unicidade da decomposição PARAFAC forem satisfeitas. O receptor não-supervisionado proposto oferece desempenho próximo do erro quadrático médio mínimo (EQMM) sem depender de restrições como independência estatística no tempo ou no espaço, conhecimento do código no receptor, dentre outros.

B. Sistemas KRST

Em [11] Sidiropoulos e Budampati propuseram um sistema de comunicação tensorial que utiliza um esquema de codificação espaço-temporal baseado no produto Khatri-Rao[1] chamado de código *Khatri-Rao Space Time* (KRST). Nesse sistema, um conjunto de M símbolos é transmitido em cada bloco de tempo n através de M antenas. Duas matrizes de código, representadas por $\mathbf{\Theta} \in \mathbb{C}^{M \times M}$ e $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{J \times M}$ são utilizadas para codificar os símbolos de informação. A primeira matriz combina linearmente os M símbolos em cada uma das M antenas, gerando o sinal pré-codificado $\mathbf{v}_n = \mathbf{\Theta}\mathbf{s}_n \in \mathbb{C}^M$. A segunda matriz espalha o sinal pré-codificado através de J slots de tempo da seguinte forma: $\mathbf{V} \diamond \mathbf{C} \in \mathbb{C}^{NJ \times M}$, em que $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N] \in \mathbb{C}^{N \times M}$ é a matriz com a concatenação dos sinais pré-codificados durante N blocos de tempo. O sinal tensorial recebido $\mathcal{T} \in \mathbb{C}^{K \times N \times J}$ nas K antenas de recepção satisfaz o modelo PARAFAC de rank M em que as matrizes fatores são: a matriz de canal MIMO, $\mathbf{V}$, e $\mathbf{C}$. A decomposição PARAFAC do tensor $\mathcal{T}$ favorece a estimação

[1]O produto Khatri-Rao entre as matrizes $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{I \times N}$ e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{J \times N}$, denotado por $\mathbf{A} \diamond \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{IJ \times N}$, é definido como $[\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_N \otimes \mathbf{b}_N]$, em que $\otimes$ denota o produto Kronecker, $\mathbf{a}_n$ e $\mathbf{b}_n$ representam as n-ésimas colunas de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, respectivamente.

das suas matrizes fatores de forma não-supervisionada. Nota-se que após a estimação de $\mathbf{V}$, é necessário realizar a detecção dos símbolos transmitidos. Métodos como *sphere decoding* ou detecção de máxima verossimilhança podem ser utilizados para tal fim. Mostrou-se que os códigos KRST oferecem melhor qualidade de estimação de símbolos em SNR alta do que os códigos LD (*Linear Dispersion*). Também comparou-se o código KRST com códigos do tipo ST-LCP (*Space-Time Linear Constellation Precoding*) e observou-se que os códigos KRST alcançam as mesmas taxas dos códigos ST-LCP utilizando constelações de ordem inferior, sendo, portanto, mais eficientes.

C. Sistemas STF/TSTF

Sistemas que exploram as diversidades espaço, tempo e frequência (STF) para sistemas MIMO-OFDM foram propostos visando aumentar o grau de multiplexação de símbolos e a eficiência espectral. Um novo modelo tensorial para sistemas MIMO com espalhamento e multiplexação utilizando essas diversidades foi proposto em [12]. Nesse modelo, o sinal tensorial no receptor admite uma decomposição PARATUCK-2, o que permite o desenvolvimento de um receptor capaz de estimar conjuntamente os símbolos transmitidos, a matriz de canal, e o código de forma não-supervisionada. Um outro modelo tensorial foi proposto em [13] para sistemas MIMO OFDM-CDMA, em que um novo código tensorial espaço, tempo e frequência (TSTF) foi utilizado juntamente com uma estrutura tensorial de alocação de recursos. Mostrou-se que o sinal tensorial no receptor obedece o modelo PARATUCK-(2,5), possibilitando a estimação conjunta dos símbolos transmitidos e da matriz de canal através de um algoritmo semi-supervisionado. Mostrou-se também que o sistema TSTF apresenta um compromisso interessante entre performance e complexidade, oferece um bom desempenho na estimação de símbolos, e permite uma alocação flexível de recursos em relação a outros sistemas tensoriais.

D. Sistemas cooperativos

O conceito de comunicações cooperativas surgiu como uma possibilidade de aumentar a capacidade e área de cobertura dos futuros sistemas de comunicação sem fio [14]. Este conceito está fundamentado no uso de estações retransmissioras (*relays*) para, de forma intermediária, melhorar a qualidade dos sinais e reenviá-los ao receptor final. Atualmente existem duas estratégias importantes de retransmissão em sistemas cooperativos. A primeira, conhecida como *amplify and forward* (AF), consiste simplesmente em amplificar o sinal recebido e encaminhá-lo ao terminal receptor. Nota-se que nesta estratégia as distorções introduzidas pelo canal entre a estação transmissora e o *relay* não são canceladas. A estratégia *decode and forward* (DF) recupera o sinal transmitido e o retransmite em seguida. Nesta estratégia, o receptor recebe sinais menos distorcidos, pois eles foram previamente regenerados pelo *relay*. Prefere-se utilizar o protocolo AF ao DF quando existem restrições em relação à complexidade e/ou latência de processamento. A simples arquitetura de dois saltos (transmissor-*relay*, *relay*-receptor) é capaz de melhorar a área de cobertura e combater perdas como o desvanecimento e o sombreamento em sistemas de comunicações sem fio.

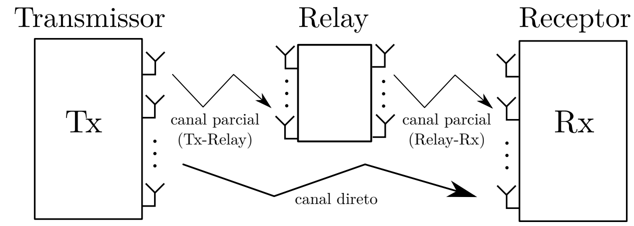

Figura 2. Ilustração de um sistema cooperativo de dois saltos.

Nas estratégias usadas atualmente, o desempenho de receptores depende fortemente da qualidade de estimação do *channel information state* (CSI). No contexto atual de comunicações cooperativas, além do canal direto, surge o conceito de canais parciais, aqueles que constituem os enlaces de salto, como ilustrados na Figura 2. Em [15], [16], por exemplo, são propostos métodos para estimação desses canais utilizando a decomposição em valores singulares. Porém nenhum desses métodos fornece a estimação conjunta do canal e dos símbolos.

Recentemente, decomposições tensoriais foram aplicadas no problema de estimação de canal em comunicações cooperativas. Isso possibilitou o desenvolvimento de receptores capazes de estimar conjuntamente os símbolos transmitidos bem como os canais parciais. O artigo [17] foi um dos primeiros trabalhos a utilizar a modelagem tensorial nesse contexto. Nele foi considerado um sistema AF MIMO com dois saltos utilizando sequências de treinamento. Mostrou-se que os sinais na estação receptora admitem uma estrutura PARAFAC, possibilitando o desenvolvimento de um método analítico para a estimação de canais. Em [18], os autores consideraram um sistema AF MIMO com uma versão simplificada da codificação KRST na transmissão. Mostrou-se que os sinais provenientes do enlace direto admitem uma decomposição PARAFAC no receptor, enquanto os sinais vindos dos enlaces com retransmissão satisfazem a decomposição PARATUCK2. Foi proposto um algoritmo que combina os dois sinais tensoriais recebidos para estimação conjunta dos símbolos transmitidos e dos canais de ambos os saltos.

A maioria dos trabalhos nesse contexto consideram o cenário MIMO com dois saltos. Porém sistemas com múltiplos saltos podem ajudar ainda mais na expansão da área de cobertura, no aumento da capacidade do sistema, e no combate às distorções introduzidas nos sinais transmitidos pelos canais de propagação. Neste sentido, estimadores de canal para sistemas *multirelay* com três saltos foram propostos em [19].

E. Sistemas radar MIMO

Recentemente, sistemas radar MIMO têm recebido bastante atenção. Nesse novo tipo de radar, sinais independentes são transmitidos nas múltiplas antenas de transmissão, diferentemente dos radares *phased array*, que emite versões ponderadas de um mesmo sinal [20]. Essa diversidade de forma de onda oferece melhor desempenho em relação aos radares clássicos. Por exemplo, mostrou-se que esse novo paradigma oferece melhor resolução espacial e maior sensitividade na detecção de alvos que se deslocam lentamente. Um dos objetivos dos sistemas radar é a localização de alvos através da detecção de sinais transmitidos e a estimação de seus parâmetros. Dentre tais parâmetros de interesse estão a *Direction of Arrival* (DoA) e a *Direction of Departure* (DoD). Técnicas de processamento de imagens foram propostas para a detecção e a estimação desses parâmetros em sistemas radar MIMO [21]. Porém eles apresentam baixa resolução espacial, sensibilidade a desvanecimento e alta complexidade computacional, por serem baseados em uma busca exaustiva.

Assim como em outros sistemas *wireless*, é possível explorar as múltiplas diversidades presentes em sistemas radar MIMO através da álgebra multilinear. Especificamente, mostrou-se em [22] que a consideração da diversidade de forma de onda leva a um processamento tensorial de acordo com o modelo PARAFAC. A formulação tensorial desse sistema leva a um método com identificabilidade melhorada de DoA, pois a flexibilidade dessa decomposição permite a exploração da estrutura algébrica presente nesse tipo de problema. Além disso, o método proposto nesse artigo é mais simples do que os métodos baseados em imagens, pois é possível obter a estimação da DoA diretamente dos fatores da decomposição PARAFAC, sem utilizar busca exaustiva.

Uma etapa que antecede a decomposição PARAFAC é a seleção de modelo, ou seja, a determinação do rank dessa decomposição. Métodos como *Core Consistency Analysis* (CORCONDIA), *R-dimensional Exponential Fitting Test* (R-D EFT) e *R-dimensional Akaike Information Criterion* (R-D AIC) foram propostos para a seleção de modelo dessa decomposição [23].

F. Identificação não-supervisionada de sistemas MIMO através de estatísticas de ordem superior

Métodos supervisionados de identificação de canais sem fio utilizam sequências de treinamento, diminuindo a taxa efetiva de transmissão e dados. Por outro lado, métodos não-supervisionados não necessitam da etapa de treinamento no período de aquisição para realizar a identificação do canal, aumentando, assim, a taxa efetiva de transmissão e a eficiência espectral. Sabe-se que métodos de identificação de canal que utilizam estatísticas de 2ª ordem não são capazes de identificar a fase de sistemas com fase não-mínima. Em contrapartida, estatísticas de ordem superior preservam informação de fase e magnitude desse tipo de sistema. Sabe-se que momentos e cumulantes de N-ésima ordem são elementos de um tensor simétrico de N-ésima ordem. No contexto do processamento de sinais, os cumulantes do sinal de saída de um certo sistema relacionam-se multilinearmente com os cumulantes do sinal de entrada através dos coeficientes desse sistema. Portanto tensores de cumulantes contém informações latentes sobre o sistema a ser identificado. Em vista disso, vários algoritmos não-supervisionados foram propostos [24]. Dentre eles, está o famoso algoritmo JADE [25], que explora a auto-estrutura do tensor de cumulantes de 4ª ordem do sinal de observações. Em [26] foi proposto uma família de métodos não-supervisionados para a identificação de sistemas SISO e MIMO baseada na decomposição PARAFAC do tensor de cumulantes de 4ª ordem dos sinais recebidos. Os algoritmos propostos são capazes de realizar a identificação inclusive em cenários sub-determinados (número de antenas $<$ número de fontes virtuais) graças às brandas condições para a unicidade dessa decomposição. É importante lembrar que métodos matriciais não são capazes de operar nesse tipo de cenário. Mostrou-se que os métodos propostos apresentam melhor qualidade de identificação de sistema que outros métodos baseados na análise do tensor de cumulantes como o FOOBI [27].

Uma diferente classe de métodos de identificação não-supervisionada explorando a segunda função característica (FCA) dos sinais recebidos no lugar de seus cumulantes foi apresentada em [28], [29]. Nesses trabalhos, os autores mostraram que as derivadas parciais de ordem superior da 2ª FCA levam a um tensor simétrico. Assim como em [26], a decomposição PARAFAC desse tensor leva à identificação não-supervisionada do canal, inclusive em cenários sub-determinados.

G. Identificação e equalização não-supervisionadas de sistemas MIMO-Volterra

A série de Volterra é uma das formas mais comuns de se representar sistemas não-lineares. A decomposição de um sistema em termos desta série leva a uma representação generalizada da convolução linear [30]. Em comunicações encontram-se diversos problemas naturalmente não-lineares. Todo sistema de comunicações que utiliza amplificadores de potência está sujeito à distorções não-lineares, as quais tornam-se importantes em sinais com altos PAPR (*peak-to-average ratio*), definido como a razão entre a máxima amplitude do sinal e seu valor *root mean square* (RMS). Como sinais OFDM geralmente apresentam elevado PAPR, eles são bastante vulneráveis a esse tipo de distorção. Canais MIMO-OFDM com distorções não-lineares foram bastante estudados no contexto de comunicações por satélites [31] e frequentemente são representados através de sistemas de Volterra.

Muitas vezes é necessário uma quantidade elevada de parâmetros para se representar um canal MIMO-Volterra através de um sistema de MIMO-Volterra. Consequentemente os algoritmos adaptativos utilizados na sua identificação ou equalização apresentam convergência lenta. Em vista disso, foi proposto em [32] um método não-supervisionado de equalização baseado na decomposição PARAFAC de um tensor de covariâncias espaço-temporais dos sinais recebidos em um arranjo de antenas. Dentre as vantagens da abordagem tensorial está a possibilidade de tratar casos sub-determinados, em que a quantidade de parâmetros do sistema de Volterra a ser estimado pode ser minorizada.

III. Perspectivas do processamento tensorial de sinais aplicado em sistemas de comunicação

O campo do processamento tensorial de sinais é relativamente novo. Em razão disso, ainda há várias questões abertas tanto no contexto da ferramenta em si como na sua aplicação em telecomunicações. Grandes perspectivas se abrem na "tensorização" de problemas que não são naturalmente multilineares. Nesse contexto, as vantagens dos métodos multilineares são incorporadas em problemas lineares clássicos. Decomposições tensoriais generalizadas têm sido propostas no contexto de redes de tensores. Acredita-se que esse novo paradigma tensorial possa levar à criação de novos métodos de processamento tensorial de sinais ainda mais eficientes. Também há um grande interesse no desenvolvimento de algoritmos eficientes para decomposições tensoriais, inclusive os que seguem o paradigma de redes de tensores.

Em relação ao emprego do processamento tensorial de sinais em sistemas de comunicação, acredita-se que novas ferramentas tensoriais para a codificação e decodificação cooperativas precisam ser desenvolvidas. A consideração de cenários mais realísticos, bem como o estudo de outras estratégias de retransmissão são interessantes vertentes de estudos a serem seguidas. Praticamente não há aplicações de métodos tensoriais em sistemas de telecomunicações espaciais. Resultados como aqueles obtidos em sistemas radar MIMO, motivam a aplicação da álgebra multilinear nesse contexto. Redes de sensores sem fio necessitam de algoritmos eficientes para a análise de fenômenos tratados como multilineares. A álgebra multilinear oferece um conjunto de ferramentas para estimação de parâmetros que pode ser implementado de forma paralela. Portanto, torna-se mandatório estudar a aplicação dos métodos tensoriais em redes de sensores sem fio.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq e à CAPES pelo suporte financeiro.

REFERÊNCIAS

[1] L. De Lathauwer, *Signal processing based on multilinear algebra*. Katholieke Universiteit Leuven, 1997.

[2] A. Cichocki, D. P. Mandic, A. H. Phan, C. F. Caiafa, G. Zhou, Q. Zhao, and L. De Lathauwer, "Tensor decompositions for signal processing applications," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 32, no. 2, pp. 145–163, 2015.

[3] P. Comon, "Tensors: a brief introduction," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 3, pp. 44–53, 2014.

[4] T. G. Kolda and B. W. Bader, "Tensor decompositions and applications," *SIAM review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, 2009.

[5] N. K. M. Faber, R. Bro, and P. K. Hopke, "Recent developments in candecomp/parafac algorithms: a critical review," *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 65, no. 1, pp. 119–137, 2003.

[6] D. Nion and N. D. Sidiropoulos, "Adaptive algorithms to track the parafac decomposition of a third-order tensor," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, no. 6, pp. 2299–2310, 2009.

[7] A.-H. Phan, P. Tichavsky, and A. Cichocki, "Deflation method for CANDECOMP/PARAFAC tensor decomposition," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014*. IEEE, 2014, pp. 6736–6740.

[8] A. L. F. De Almeida and A. Y. Kibangou, "Distributed large-scale tensor decomposition," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP), 2014*. IEEE, 2014, pp. 26–30.

[9] G. Favier and A. L. de Almeida, "Overview of constrained parafac models," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2014, no. 1, pp. 1–25, 2014.

[10] N. D. Sidiropoulos, G. B. Giannakis, and R. Bro, "Blind PARAFAC receivers for DS-CDMA systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 48, no. 3, pp. 810–823, 2000.

[11] N. D. Sidiropoulos and R. S. Budampati, "Khatri-Rao space-time codes," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 50, no. 10, pp. 2396–2407, 2002.

[12] A. L. de Almeida, G. Favier, and L. R. Ximenes, "Space-time-frequency (STF) MIMO communication systems with blind receiver based on a generalized paratuck2 model," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 61, no. 8, pp. 1895–1909, 2013.

[13] G. Favier and A. L. F. de Almeida, "Tensor space-time-frequency coding with semi-blind receivers for MIMO wireless communication systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 22, pp. 5987–6002, Nov 2014.

[14] C.-X. Wang, X. Hong, X. Ge, X. Cheng, G. Zhang, and J. Thompson, "Cooperative MIMO channel models: A survey," *IEEE Communications Magazine*, vol. 48, no. 2, pp. 80–87, 2010.

[15] X. Yu and Y. Jing, "SVD-based channel estimation for MIMO relay networks," in *IEEE Vehicular Technology Conference (VTC Fall), 2012*. IEEE, 2012, pp. 1–5.

[16] P. Lioliou, M. Viberg, and M. Coldrey, "Efficient channel estimation techniques for amplify and forward relaying systems," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 60, no. 11, pp. 3150–3155, 2012.

[17] F. Roemer and M. Haardt, "Tensor-based channel estimation and iterative refinements for two-way relaying with multiple antennas and spatial reuse," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 11, pp. 5720–5735, 2010.

[18] L. R. Ximenes, G. Favier, A. L. de Almeida, and Y. C. Silva, "PARAFAC-PARATUCK semi-blind receivers for two-hop cooperative MIMO relay systems," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 14, pp. 3604–3615, 2014.

[19] X. Han, A. L. de Almeida, and Z. Yang, "Channel estimation for MIMO multi-relay systems using a tensor approach," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2014, no. 1, pp. 1–14, 2014.

[20] J. Li and P. Stoica, "MIMO radar with colocated antennas," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, no. 5, pp. 106–114, 2007.

[21] L. Xu, J. Li, and P. Stoica, "Adaptive techniques for MIMO radar," in *Fourth IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing, 2006*. IEEE, 2006, pp. 258–262.

[22] D. Nion and N. D. Sidiropoulos, "Tensor algebra and multidimensional harmonic retrieval in signal processing for MIMO radar," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 58, no. 11, pp. 5693–5705, 2010.

[23] J. Da Costa, F. Roemer, M. Haardt, and R. T. de Sousa Jr, "Multi-dimensional model order selection," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 26, pp. 1–13, 2011.

[24] M. S. Pedersen, J. Larsen, U. Kjems, and L. C. Parra, "A survey of convolutive blind source separation methods," *Multichannel Speech Processing Handbook*, pp. 1065–1084, 2007.

[25] J.-F. Cardoso and A. Souloumiac, "Blind beamforming for non-gaussian signals," in *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, vol. 140, no. 6. IET, 1993, pp. 362–370.

[26] C. E. R. Fernandes, G. Favier, and J. C. M. Mota, "Blind channel identification algorithms based on the PARAFAC decomposition of cumulant tensors: the single and multiuser cases," *Signal Processing*, vol. 88, no. 6, pp. 1382–1401, 2008.

[27] L. De Lathauwer, J. Castaing, and J.-F. Cardoso, "Fourth-order cumulant-based blind identification of underdetermined mixtures," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, no. 6, pp. 2965–2973, 2007.

[28] P. Comon and M. Rajih, "Blind identification of under-determined mixtures based on the characteristic function," *Signal Processing*, vol. 86, no. 9, pp. 2271–2281, 2006.

[29] X. Luciani, A. L. De Almeida, and P. Comon, "Blind identification of underdetermined mixtures based on the characteristic function: the complex case," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 59, no. 2, pp. 540–553, 2011.

[30] C. A. R. Fernandes, J. C. M. Mota, and G. Favier, "MIMO volterra modeling for nonlinear communication channels," *Learning and Nonlinear Models*, vol. 2, no. 8, pp. 71–92, 2010.

[31] S. Benedetto, E. Biglieri, and R. Daffara, "Modeling and performance evaluation of nonlinear satellite links - A Volterra series approach," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, no. 4, pp. 494–507, 1979.

[32] C. A. Fernandes, G. Favier, and J. C. M. Mota, "Blind identification of multiuser nonlinear channels using tensor decomposition and precoding," *Signal Processing*, vol. 89, no. 12, pp. 2644–2656, 2009.